Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

ВАРИАНТ 263

1. Найдите в явном виде натуральное число, равное

$$100 + \frac{1}{2}\Big(99 + \frac{1}{2}\Big(98 + \ldots + \frac{1}{2}\Big(4 + \frac{1}{2}\Big(3 + \frac{1}{2}\cdot 2\Big)\Big)\ldots\Big)\Big).$$

2. Решите уравнение $1 + \sin x + \sin 3x + \sin 5x = 4\cos^2 x$.

3. Решите неравенство $\log_{x+3} \dfrac{4x^2+3}{8x+20} \leq 1$.

4. Высоты BD и CE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка K — середина отрезка AH, точка M — середина отрезка BC. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если известно, что $DE = 1$ и что $\angle DKE = \angle DME$.

5. Даны действительные числа a, b, c, удовлетворяющие неравенствам $a \geq b \geq c$ и равенству $a^2 + b^2 + c^2 = 4$. Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$(a-b)(b-c)(a+b+c)^2.$$

6. Дана прямая треугольная призма с основанием ABC и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, описанная около сферы радиуса 1. Найдите объём этой призмы, если известно, что угол между прямой AB_1 и плоскостью AA_1C равен углу между этой прямой и плоскостью BB_1C, а угол между прямой AC_1 и плоскостью AA_1B равен углу между этой прямой и плоскостью BB_1C.