

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

ВАРИАНТ 254

1. Найдите в явном виде целое число, задающееся выражением $\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{15} - \frac{1}{10}\right)^{-1}$.
2. Строго возрастающая последовательность $a_1, a_2, a_3, \dots$ натуральных чисел удовлетворяет при каждом натуральном n соотношению

$$a_{n+2} \leq \sqrt{a_n^2 + 2a_n + 2a_{n+1} + 2}.$$

Найдите все возможные значения a_{25} , если известно, что $a_1 = 1$.

3. Решите неравенство

$$(2 - 2x) \cdot \log_{2 \cdot 3^x - 5} \sqrt{3} \leq 1.$$

4. Решите уравнение $\sin 3x(\cos x - \cos 2x) - \cos 3x(\sin x - \sin 2x) = 6 \cos x - 3$.
5. Внутри окружности Ω радиуса 5 отмечена точка E , через которую проведены хорды AB и CD , перпендикулярные друг другу. Найдите все возможные значения расстояния от вершины F прямоугольника $AECF$ до центра O окружности Ω , если известно, что $OE = 1$.
6. Положительные действительные числа a, b, c удовлетворяют равенству $a + b + c = 1$. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\frac{\sqrt{(1-a)(1-b)} + \sqrt{(1-b)(1-c)} + \sqrt{(1-c)(1-a)}}{1 + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}}.$$

7. Дан куб с основаниями $ABCD, A'B'C'D'$ и боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD' . Длина ребра этого куба равна 1. На диагонали AC основания $ABCD$ отмечена точка E так, что $AE = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$. Найдите площадь сечения данного куба, проходящего через его центр O и перпендикулярного прямой OE .